C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, série I, p. 611-614, 2001.
Analyse Mathématique, *Mathematical Analysis*

Calcul fonctionnel sous-elliptique et résidu non commutatif sur les variétés de Heisenberg

Raphaël PONGE

Institut für Mathematik, Universität Potsdam, 14 415 Potsdam, Allemagne
Courriel : `ponge@math.uni-potsdam.de`

(Reçue le 29 janvier 2001, acceptée le 12 février 2001)

Résumé. Après avoir développé un calcul fonctionnel pour des sous-laplaciens sous-elliptiques, on construit un résidu non commutatif pour les variétés de Heisenberg.

Sub-elliptic functional calculus and non-commutative residue on Heisenberg manifolds

Abstract. *After having carried out a functional calculus for sub-elliptic sub-Laplacians, we construct a non-commutative residue for Heisenberg manifolds.*

Dans cette Note, après avoir présenté dans la section 1 le calcul sous-elliptique sur les variétés de Heisenberg, i.e. l'algèbre des $\Psi_H DO$-opérateurs, on démontre que la résolvante d'un sous-laplacien sous-elliptique se place dans une algèbre de $\Psi_H DO$ à paramètre (théorème 1) et on construit les puissances d'un tel sous-laplacien en termes de familles holomorphes de $\Psi_H DO$ (théorème 2). On montre ensuite qu'on a un unique prolongement analytique de la trace à tous les $\Psi_H DO$ d'ordre complexe non entier (théorème 3). Le résidu non commutatif apparaît alors comme une trace résiduelle sur les $\Psi_H DO$ d'ordre entier. Ce résidu a des propriétés analogues à celles du résidu de Wodzicki-Guillemin et on montre en fin de compte qu'il permet d'engendrer tout l'espace des traces sur $\Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)/\Psi^{-\infty}(M)$ (théorème 4).

Pour simplifier les notations, les résultats dans cette note ne sont donnés que pour des opérateurs scalaires. Ils s'étendent *verbatim* aux opérateurs agissant sur les sections d'un fibré.

Les résultats de cette Note sont issus de la thèse de doctorat de l'auteur soutenue à Orsay le 4 décembre 2000.

1 Calcul sous-elliptique sur les variétés de Heisenberg

Une *variété de Heisenberg* est une variété M munie d'un sous-fibré en hyperplans $H \subset TM$. Un difféomorphisme $\phi : (M, H) \to (M, H')$ est dit Heisenberg si $\phi^* H = H'$. Le modèle local d'une variété de Heisenberg de dimension $d + 1$ est un ouvert U de $\mathbb{R}^{d+1}$ muni d'un sous-fibré en hyperplans $H \subset TU$ et d'un *H-repère*, c.a.d. d'un repère $X_0, X_1, \ldots, X_d$ de TU tel que $X_1, \ldots, X_d$

engendrent H. Si $X_0, X_1, \ldots, X_d$ est un H-repère on définit son symbole comme $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_d)$ où $\sigma_j(x,\xi)$ est le symbole (standard) de $\frac{1}{i}X_j$.

Dans toute la suite (M^{d+1}, H) *sera une variété de Heisenberg* compacte *et* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^{d+1}$*, éventuellement muni d'un* H*-repère de symbole* σ.

La terminologie *Heisenberg* provient de ce qu'on peut associer à chaque point de la variété, de façon Heisenberg-intrinsèque, un groupe tangent 2-nilpotent de la forme $\mathbb{R}^k \times H_{2n+1}$, où H_{2n+1} est le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ (avec la convention $H_1 = \mathbb{R}$). Les principaux exemples de variétés de Heisenberg sont les variétés munies d'un feuilletage de codimension 1, les variétés de contact, CR, pseudo-hermitiennes et les feuilletacts (*ang.* confoliations).

Sur ces variétés les opérateurs géométriques qui apparaissent, comme le laplacien de Kohn $\Box_b$ ou le sous-laplacien pseudo-hermitien Δ_b de Tanaka-Greenleaf-Lee, ne sont plus des laplaciens mais sont des sous-laplaciens, c.a.d. localement de la forme $\Delta = -\sum_{j=1}^d X_j^2 - i\lambda(x)X_0 + \sum_{j=1}^d \mu_j(x)X_j + \nu(x)$, où $X_0, X_1, \ldots X_d$ est un H-repère local pour TM. Le calcul sous-elliptique de Beals-Greiner [1] permet de caractériser les sous-laplaciens qui sont sous-elliptiques et lorsque c'est le cas de construire des paramétrix.

Les symboles de ce calcul sont associés aux dilatations anisotropes $\lambda.\xi = (\lambda^2\xi_0, \lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_d)$, $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\lambda > 0$. L'espace $S^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ des symboles d'ordre m, $m \in \mathbb{C}$, sur $U \times \mathbb{R}^{d+1}$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ admettant un développement asymptotique $f \sim \sum_{j\geq 0} f_{m-j}$, avec $f_k(x,\xi)$ homogène de degré k en ξ par rapport aux dilatations anisotropes. Un $\Psi_H DO$ d'ordre m sur U est alors un opérateur continu $P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ de la forme $P = f(x, \sigma(x,D)) + R$ avec $f \in S^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ et R opérateur régularisant. Ainsi un sous-laplacien comme au-dessus est un $\Psi_H DO$ d'ordre 2 dont le symbole principal est $f_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^d \xi_j^2 + \lambda(x)\xi_0$.

Toutes les propriétés classiques des ΨDO standards s'étendent aux $\Psi_H DO$: composition et développement asymptotique pour le symbole du produit, régularité L^2, caractérisation par les noyaux et invariance par difféomorphismes Heisenberg. On peut ainsi les définir sur des variétés et les faire agir sur les sections d'un fibré (*cf.* [1]). Pour les sous-laplaciens on trouve une caractérisation de la sous-ellipticité et de l'existence d'une paramétrix par une condition qui ne porte que sur les symbole principal et qui ne dépend que de la structure des groupes 2-nilpotents tangents à la variété (*cf.* [1]). Toutefois, les difficultés techniques sont beaucoup plus importantes que pour les ΨDO standards. Dans la composition des symboles intervient la famille des convolutions sur les groupes tangents 2-nilpotents en chaque point de la variété, de sorte que cette composition n'est plus microlocale, ni commutative au niveau les symboles principaux.

Enfin, une conséquence de la caractérisation par les noyaux et de la démonstration dans [1] de l'invariance par difféomorphismes est la proposition suivante :

Proposition 1. – *Soit* P *un* $\Psi_H DO$ *d'ordre entier* m*. Alors :*

1)*Près de la diagonale le noyau a une divergence logarithmique de telle sorte que pour* $\lambda \to 0^+$ *on ait* $k_P(x, \lambda.x) = p_x(\lambda^{-1}) - c_P(x)\log\lambda + \mathrm{O}(1)$*, où* $p_x(\mu)$ *est un polynôme de degré* $\leq m+d+2$.

2) *Le coefficient* $c_P(x)$ *définit une densité sur* M *invariante par difféomorphismes Heisenberg.*

2 Calcul à paramètre et résolvante d'un sous-laplacien sous-elliptique

On appelle *pseudo-cône* un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbb{C}\backslash 0$ tel que $t\Lambda \subset \Lambda$ pour tout $t \in (0,1)$ et qui soit de la forme $\Lambda = \Theta \cup D$ avec Θ conique et D borné. Si Λ et Λ' sont deux pseudo-cônes on écrit $\Lambda' \subset\subset \Lambda$ pour signifier que $\bar{\Lambda}' \setminus 0$ est contenu dans l'intérieur de Λ.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et Λ un pseudo-cône. Alors $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$ désigne l'espace des fonctions h holomorphes sur Λ telles que pour tout pseudo-cône $\Lambda' \subset\subset \Lambda$ on ait $|h(\lambda)| \leq C_{\Lambda'}(1+|\lambda|)^p$ sur Λ'. On dit qu'une famille $(f_{(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe E est une $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$*-famille* si elle est holomorphe et si pour toute semi-norme continue q sur E et tout pseudo-cône $\Lambda' \subset\subset \Lambda$ on a $q(f_{(\lambda)}) \leq C_{\Lambda'}(1+|\lambda|)^p$ sur Λ'.

A cause de la non-microlocalité de la composition des symboles du calcul, les symboles à paramètre homogènes ne pourraient pas se composer. Pour cette raison on introduit les espaces de symboles à paramètre $S^p_m(U \times \mathbb{R}^{d+1}, \Lambda)$ et $S^{p,m}(U \times \mathbb{R}^{d+1}, \Lambda)$, $m, p \in \mathbb{Z}$. Le premier est formé des $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$-familles $(f_{(\lambda)}) \subset C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ qui sont presque-homogènes, au sens où pour tout $t \in (0,1]$ la famille $f_{(t^2\lambda)}(x, t.\xi) - t^m f_{(\lambda)}(x,\xi)$ appartient à $S^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^{d+1}) \hat{\otimes} \mathrm{Hol}^p(\Lambda)$. Le deuxième consiste en les $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$-familles $(f_{(\lambda)}) \subset C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ ayant un développement asymptotique $f_{(\lambda)} \sim \sum_{j\geq 0} f_{(\lambda),m-j}$, $f_k \in S^p_k(U \times \mathbb{R}^{d+1})$, avec des bornes qui sont des $\mathrm{O}(|\lambda|^p)$.

On définit alors l'espace de $\Psi_H DO$ à paramètre $\Psi_H^{p,m}(U)$ comme l'espace des $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$ familles $P_{(\lambda)}$ d'opérateurs continus de $C^\infty_c(U)$ vers $C^\infty(U)$ qui sont de la forme $P_{(\lambda)} = f_{(\lambda)}(x, \sigma(x,D)) + R_{(\lambda)}$, avec $f_{(\lambda)} \in S^{p,m}(U \times \mathbb{R}^{d+1}, \Lambda)$ et $R_{(\lambda)}$ donné par une $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$-famille de noyaux lisses. On montre que la définition des $\Psi_H DO$ à paramètre s'étend aux variétés, que si $P_{(\lambda),1} \in \Psi_H^{p_1,m_1}(M,\Lambda)$ et $P_{(\lambda),2} \in \Psi_H^{p_2,m_2}(M,\Lambda)$ alors $P_{(\lambda),1}P_{(\lambda),2} \in \Psi_H^{p_1+p_2,m_1+m_2}(M,\Lambda)$, et que pour $m \leq 0$ tout $P_{(\lambda)} \in \Psi_H^{p,m}$ s'étend en une $\mathrm{Hol}^p(\Lambda)$-famille d'opérateurs bornés sur $L^2(M)$.

Théorème 1. – *Soit Δ un sous-laplacien sous-elliptique sur M et soit $\Theta_0 = \{\Re\lambda < 0\}$. Alors :*

1) *Δ a au plus un nombre fini de valeurs propre dans tout secteur angulaire $\Theta \subset\subset \Theta_0$.*

2) *Si L est rayon contenu dans Θ_0 qui ne passe pas par une valeur propre de Δ, alors c'est un rayon de croissance minimalet pour Δ et il existe un pseudo-cône ouvert Λ contenant L tel que que $\Delta - \lambda$ soit inversible pour tout $\lambda \in \Lambda$ et que $(\Delta-\lambda)^{-1} \in \Psi_H^{-1,-2}(M,\Lambda)$.*

Démonstration.– On montre que pour tout $R > 0$, posant $\Lambda_R = \Theta_0 \cup D(0,R) \setminus 0$, il existe $Q_{(\lambda)} \in \Psi_H^{-1,-2}(M,\Lambda_R)$ tel que $(\Delta-\lambda)Q_{(\lambda)} = 1 = Q_{(\lambda)}(\Delta-\lambda)$ modulo $\Psi_H^{-1,-\infty}(M,\Lambda_R)$. Comme le spectre de Δ est discret, on en déduit le théorème via la régularité L^2 des $\Psi_H DO$ à paramètre. $\square$

3 Familles holomorphes de $\Psi_H DO$ et puissances complexes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille de symboles $(f_z)_{z\in\Omega} \subset S^*(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ est holomorphe si l'ordre m_z de f_z est une fonction holomorphe sur Ω, si pour x et ξ fixés $f_z(x,\xi)$ dépend holomorphiquement de z, et si les bornes du développement asymptotique $f_z \sim \sum f_{z,m_z-j}$ sont localement uniformes par rapport à z. On dit ensuite qu'une famille (P_z) de $\Psi_H DO$ sur U est holomorphe si elle est de la forme $P_z = f_z(x,\sigma(x,D)) + R_z$, avec (f_z) famille holomorphe de symboles et R_z donné par une famille holomorphe de noyaux lisses. On vérifie que cette dernière définition s'étend aux variétés et qu'elle est stable par composition.

Théorème 2. – *Soit Δ un sous-laplacien sous-elliptique sur M. Alors :*

1) *Si $\Delta \geq c > 0$, la famille $(\Delta^s)_{s\in\mathbb{C}}$ donnée par calcul fonctionnel sur $L^2(M)$ est une famille holomorphe de $\Psi_H DO$.*

2) *Si Δ est inversible (resp. auto-adjoint), il existe un groupe à 1 paramètre holomorphe de $\Psi_H DO$-opérateurs Δ^s tel que et $\Delta^1 = \Delta$ et $\Delta^0 = 1$ (resp. $\Delta^0 = 1 - \Pi_0$), où Π_0 est le projecteur orthogonal sur* $\ker \Delta$.

Démonstration.– Pour le 1) on utilise la formule de Mellin $\Delta^{-s} = \Gamma(s)^{-1}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t\Delta}dt$, $\Re s < 0$, et la construction pseudo-différentiel du noyau de la chaleur de [2]. Pour le 2) le théorème 1 permet précisément d'adapter la construction de [6] au calcul Heisenberg. $\square$

4 Trace régularisée et résidu non-commutatif

Si P appartient à $\Psi_H^{\mathrm{int}}(M) = \{P \in \Psi_H^*(M); \Re\mathrm{ord} P < -(d+2)\}$ la restriction de son noyau à la diagonale est une densité lisse $k_P(x,x)$. Ainsi P est traçable et on a $\mathrm{Trace}\, P = \int_M k_P(x,x)$. En suivant [5] et [3] on montre que l'application $P \to k_P(x,x)$ de $\Psi_H^{\mathrm{int}}(M)$ vers l'espace des densités sur M a un unique prolongement analytique $P \to t_P(x)$ sur l'espace $\Psi_H^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$ des $\Psi_H DO$ d'ordre complexe non entier, de sorte qu'on obtient :

THÉORÈME 3. – 1) *La fonctionnelle* $P \to \mathrm{Trace}(P)$ *définie sur* $\Psi_H^{\mathrm{int}}(M)$ *a un unique prolongement analytique* $P \to \mathrm{TR}\, P$ *sur* $\Psi_H^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M)$ *donné par* $\mathrm{TR}\, P = \int_M t_P(x)$.

2) *Si* P_1 *et* P_2 *sont des* $\Psi_H DO$ *tels que* $\mathrm{ord} P_1 P_2 \notin \mathbb{Z}$, *alors* $\mathrm{TR}\, P_1 P_2 = \mathrm{TR}\, P_2 P_1$.

3) *Si* $P \in \Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)$ *et si* (P_z) *est un famille holomorphe de* $\Psi_H DO$ *telle que* $P_0 = P$ *et* $\mathrm{ord} P_z = z + \mathrm{ord} P$, *alors* $\mathrm{TR}\, P_z$ *a au-plus un pôle simple en* $z = 0$ *de résidu* $-\int_M c_P(x)$, *où* $c_P(x)$ *est la densité donnée par le coefficient de la divergence logarithmique du noyau de* P *(*cf. *proposition 1).*

On définit alors le *résidu non-commutatif* de $P \in \Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)$ en posant $\mathrm{Res}\, P = \int_M c_P(x)$. Par définition Res est une fonctionnelle locale invariante par difféomorphismes Heisenberg, et il résulte du 2) du théorème que c'est une trace. De plus le 3) implique qu'elle s'annule sur les $\Psi_H DO$ d'ordre entier $\leq -(d+3)$ et que si Δ est un sous-laplacien sous-elliptique, auto-adjoint ou inversible, on a $\mathrm{Res}\, P = 2\, \mathrm{res}_{s=0}\, \mathrm{TR}\, P\Delta^{-s}$ pour tout $P \in \Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)$. En particulier, le résidu non commutatif induit une trace sur l'algèbre $\Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)/\Psi^{-\infty}(M)$. C'est en fait essentiellement la seule :

THÉORÈME 4. – *Toute trace sur* $\Psi_H^{\mathbb{Z}}(M)/\Psi^{-\infty}(M)$ *est proportionnelle à* Res *sur chacune des composantes connexes de* M.

Démonstration.– Il suffit de procéder localement dans une carte Heisenberg locale. Dans ce cas on montre que si P est compactement supporté dans une telle carte et si c_P est une somme de dérivées, alors P est une somme de commutateurs modulo un opérateur régularisant. La conclusion en résulte. □

Remarque.– Ce théorème est obtenu indépendamment dans [4] par des calculs homologiques.

Remerciements. L'auteur remercie Alain Connes, Charles L. Epstein, Henri Moscovici et Michel Rumin pour les discussions qu'il a eu avec eux.

Références bibliographiques

[1] Beals R. et Greiner P. Calculus on Heisenberg manifolds, Ann. Math. Studies 119, Princeton Univ. Press, 1988.

[2] Beals R., Greiner P. et Stanton N., The heat equation on a CR manifold, J. Differential Geom. 20 (1984) 343–387.

[3] Connes A. et Moscovici H., The local index formula in noncommutative geometry, GAFA 5 (1995) 174–243.

[4] Epstein C., Mendoza G. et Melrose R., The Heisenberg algebra, index theory and homology, à paraître.

[5] Kontsevich M. et Vishik S., Geometry of determinants of elliptic operators, pp 173–197, Progr. Math. 131, Birkhäuser, Boston, 1995.

[6] Seeley R., Complex powers of an elliptic operator, Proc. Sympos. Pure Math. 10, pp. 288–307, AMS, 1967.